Aufgabe 1: Frustrierter Magnetismus

Betrachten Sie ein Spinmodell auf dem Quadratgitter mit N Gitterpunkten, das durch den Hamiltonian

$$H = J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \tag{1}$$

gegeben ist. In dem System gibt es einen Wettstreit zwischen antiferromagnetischer Ordnung (J_1-Term) und Streifenordnung (J_2-Term). Es ist daher nicht möglich beide Terme im Hamiltonian gleichzeitig zu minimieren - man spricht hier von frustriertem Magnetismus. Hier steht $\langle ij \rangle$ für die Summation über nächste Nachbarn und $\langle\langle ij \rangle\rangle$ für übernächste Nachbarn entlang der Diagonalen. Das Problem soll erst klassich gelöst werden. Dazu betrachten wir die Spins als Einheitsvektoren und suchen das Minimum der Energie. Gehe Sie dazu wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie den Hamiltonian im Impulsraum als $H(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k})\, \mathbf{S}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{S}_{-\mathbf{k}}$.

(b) Suchen Sie das Minimum von $J(\mathbf{k})$ und finden Sie somit die optimale Spinkonfiguration. Eine Möglichkeit den minimalen Energiezustand zu realisieren ist die Wahl $\mathbf{S}_{\mathbf{k}_0} = (0, -\mathrm{i}\sqrt{N}/2, \sqrt{N}/2)$ und $\mathbf{S}_{-\mathbf{k}_0} = (0, i\sqrt{N}/2, \sqrt{N}/2)$.

(c) Für $J1/2J_2 < 1$ gibt es Streifenordnung. Zeigen Sie kurz, wie man von den entarteten Spinkonfigurationen durch Überlagerung orthogonaler Spins zu Spiralzuständen kommt.

(d) Skizzieren Sie die Spinordnung im Realraum für $J_1 < 2J_2$, $J_1 > 2J_2$. Was passiert in den Spezialfällen $J_1 = 0$, $J_2 = 0$ und $J_1 = 2J_2$?

Aufgabe 2: Ordnung durch Unordnung

Die starke Entartung klassicher Grundzustände kann durch den Einfluss von Quantenfluktuationen (teilweise) aufgehoben werden, da bestimmte Zustände durch stärkere Fluktuationen bevorzugt werden. Diesen Effekt bezeichnet man auch als Ordnung durch Unordnung (*order by disorder*). Um diesen Effekt quantitativ zu verstehen, machen wir eine Spinwellenrechnung, in der systematisch Quantenfluktuationen um den klassichen Grundzustand eingeschaltet werden (siehe Blatt 11). Hierzu betrachten wir erst eine Verallgemeinerung des Problems aus Aufgabe 1 mit beliebigen Wechselwirkungen $J_{\mathbf{R}_n}$, nämlich

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\mathbf{R}_n} J_{\mathbf{R}_n} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+\mathbf{R}_n} \ . \tag{2}$$

Der Grundzustand, um den wir die Spinwellenrechnung ausführen, ist $\mathbf{S}_i = [0, \sin(\theta_i), \cos(\theta_i)]$. Hierbei ist $\theta_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i$.

(a) Analog zum antiferromagnetischen Fall müssen wir eine Basisrotation ausführen. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} S_i^x &= S_i^u \\ S_i^y &= \cos\theta_i S_i^v + \sin\theta_i S_i^w \\ S_i^z &= -\sin\theta_i S_i^v + \cos\theta_i S_i^w \ . \end{aligned}$$

Drücken Sie den Hamiltonian in Gleichung 2 in dieser Basis aus.

(b) Führen Sie die Holstein-Primakoff-Transformation

$$\begin{aligned} S_i^w &= S - a_i^\dagger a_i \\ S_i^+ &= S_i^u + \mathrm{i}\, S_i^v \approx \sqrt{2S} a_i \\ S_i^- &= S_i^u - \mathrm{i}\, S_i^v \approx \sqrt{2S} a_i^\dagger \ , \end{aligned}$$

aus. Der Hamiltonian soll die Form haben

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{\mathbf{R}_n} J_{\mathbf{R}_n} \{ & \frac{S}{2}(a_i a_{i+n} + a_i^\dagger a_{i+n}^\dagger)(1-\cos(\theta_i - \theta_{i+n}) + \frac{S}{2}(a_i^\dagger a_{i+n} + a_{i+n}^\dagger a_i)(1+\cos(\theta_i - \theta_{i+n}) \\ & + [S^2 - S(a_i^\dagger a_i + a_{i+n}^\dagger a_{i+n})]\cos(\theta_i - \theta_{i+n}) + \underbrace{\frac{S\sqrt{2S}}{2i}(-a_i + a_i^\dagger - a_{i+n} + a_{i+n}^\dagger)\sin(\theta_i - \theta_{i+n})}_{\text{fällt weg, siehe (c)}}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass der letzte Term in Gleichung (3) wegfällt, indem Sie die klassische Energie bezüglich der θ_i minimieren ($\partial E^{\mathrm{cl}}/\partial\theta = 0$).

(d) Gehen Sie in den Impulsraum und gruppieren Sie die Terme nach $J_{\mathbf{k}}$ und $J_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}}$ und diagonalisieren Sie den Hamiltonian mit einer Bogoliubov-Transformation.

Hinweis: Der Hamiltonian im Impulsraum ist

$$H = \frac{NS^2}{2} J_{\mathbf{q}} + \frac{S}{2}\sum_{\mathbf{k}} \left[J_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}(J_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) - 2J_{\mathbf{q}} \right] a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \tag{4}$$

$$+ \frac{S}{4}\sum_{\mathbf{k}} \left[J_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}(J_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right] \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right). \tag{5}$$

Die Energie hat dann die Form

$$E = \mathrm{const} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}(\theta) \left(\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \ , \tag{6}$$

wobei

$$\omega_{\mathbf{k}} = S\sqrt{(J_{\mathbf{k}} - J_{\mathbf{Q}})\left[\frac{1}{2}\left(J_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}}\right) - J_{\mathbf{k}}\right]}\,, \tag{7}$$

ist.

(e) Gehen Sie zurück zum J_1-J_2-Modell. Was ist der Grundzustand für $J_1/2J_2 < 1$ und wie ist seine Entartung? Gibt es noch Spinspiralen?